Cuerpo rígido

Trabajo y energía

Definiciones: ENERGÍA CINÉTICA

- Para un sistemas de partículas

$$E_c^{Sist} = \sum \frac{M_i}{2} v_i^2 = \frac{M}{2} v_{CM}^2 + \sum \frac{M_i}{2} v_{i/CM}^2$$

- Para un cuerpo rígido, por condición de rigidez $\bar{v}_{i/CM} = \bar{\Omega} \times \bar{r}_{i/CM}$

$$E_c = \frac{M}{2} v_{CM}^2 + \sum \frac{M_i}{2} \Omega^2 r_{i/CM}^2 = \frac{M}{2} v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \Omega^2 \sum M_i r_{i/CM}^2$$

I_{CM}

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \Omega^2}$$

Definiciones: ENERGÍA CINÉTICA

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \Omega^2}$$

- Podemos escribir el CM por condición de rigidez como $\bar{v}_{CM} = \bar{\Omega} \times \bar{r}_{CM/CIR}$

$$E_c = \frac{1}{2} M \Omega^2 r_{CM/CIR}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \Omega^2 = \frac{1}{2} \left(M r_{CM/CIR}^2 + I_{CM} \right) \Omega^2$$

I_{CIR}

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} I_{CIR} \Omega^2}$$

- Esto vale sólo para el CIR. Estas son las únicas expresiones válidas.

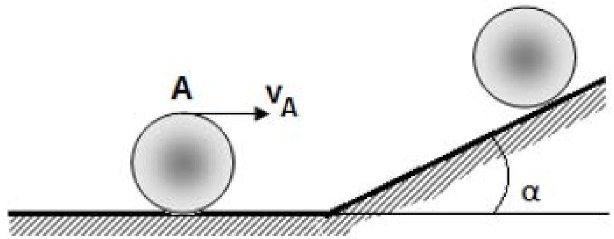
Ejemplo: ENERGÍA CINÉTICA

¿Cuánto vale la energía cinética en la base del plano (en función de datos)?

Una esfera maciza que rueda sin deslizar por un plano horizontal se encuentra con un plano inclinado que forma un ángulo α y asciende por el mismo continuando su movimiento de rodadura. Cuando llega a la base del plano inclinado, la rapidez del punto A vale v_A. (Para esfera maciza: $I_{CM}=2MR^2/5$)

a) Hallar la aceleración del centro de masa durante la subida.

b) Hallar la altura máxima que alcanzará el centro de masa.



Ejemplo: ENERGÍA CINÉTICA

¿Cuánto vale la energía cinética en la base del plano (en función de datos)?

OPCIÓN 1

$$E_c = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \Omega^2 = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} M R^2 \Omega^2$$

- ¿Ω? Por rigidez y como rueda sin deslizar: $\bar{V}_A = \bar{\Omega} \times \bar{r}_{A/CIR} \rightarrow \Omega = \frac{V_A}{2R}$
- ¿V_{CM}? Por rigidez: $\bar{v}_{CM} = \bar{\Omega} \times \bar{r}_{CM/CIR} \rightarrow v_{CM} = \Omega R = \frac{V_A}{2}$

- Entonces:

$$E_c = \frac{1}{2} M \left(\frac{V_A}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} M R^2 \left(\frac{V_A}{2R}\right)^2 = \frac{7}{40} M V_A^2$$

Ejemplo: ENERGÍA CINÉTICA

¿Cuánto vale la energía cinética en la base del plano (en función de datos)?

OPCIÓN 2

$$E_c = \frac{1}{2} I_{CIR} \Omega^2$$

- ¿Ω? Por rigidez y como rueda sin deslizar: $\bar{V}_A = \bar{\Omega} \times \bar{r}_{A/CIR} \rightarrow \Omega = \frac{V_A}{2R}$
- ¿I_{CIR}? Por teorema de Steiner: $I_{CIR} = I_{CM} + MR^2 = \frac{2}{5} MR^2 + MR^2 = \frac{7}{5} MR^2$

- Entonces:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5} MR^2 \left(\frac{V_A}{2R} \right)^2 = \frac{7}{40} M V_A^2$$

Definiciones: ENERGÍA POTENCIAL

- Para un sistemas de partículas

$$E_p^{Sist} = \sum M_i g h_i$$

- Para un cuerpo rígido,

$$E_p = \frac{M}{M} \sum M_i g h_i = Mg \frac{\sum M_i h_i}{M} = Mgh_{CM}$$

h_{CM}

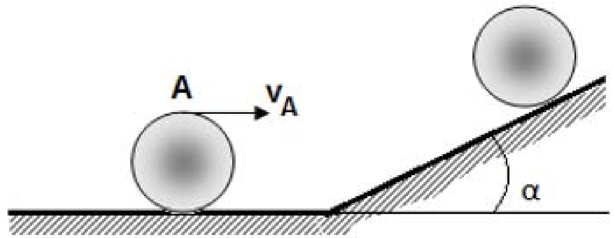
$$\boxed{E_p = Mgh_{CM}}$$

Ejemplo: ENERGÍA POTENCIAL

¿Cuánto vale la energía potencial en la base del plano (en función de datos)?

Una esfera maciza que rueda sin deslizar por un plano horizontal se encuentra con un plano inclinado que forma un ángulo α y asciende por el mismo continuando su movimiento de rodadura. Cuando llega a la base del plano inclinado, la rapidez del punto A vale v_A. (Para esfera maciza: $I_{CM}=2MR^2/5$)

a) Hallar la aceleración del centro de masa durante la subida.
b) Hallar la altura máxima que alcanzará el centro de masa.



Si tomamos Ep=0 en la superficie, la altura del CM en la base es R. Entonces:

$$E_p = MgR$$

Definiciones: TRABAJO DE UNA FUERZA

$$W^{Fi} = \int \bar{F}_i \cdot d\bar{r}_i$$

- Esto no cambia, sólo hay que considerar el desplazamiento del punto del cuerpo rígido donde se aplica la fuerza

- Si la fuerza es constante,

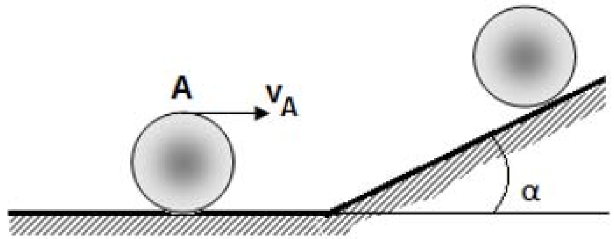
$$W^{Fi} = |\bar{F}_i| \cdot |\Delta\bar{r}_i| \cdot cos\alpha$$

Ejemplo: TRABAJO DE FUERZAS

¿Cuánto vale el trabajo de cada una de las fuerzas hasta alcanzar la altura máxima?

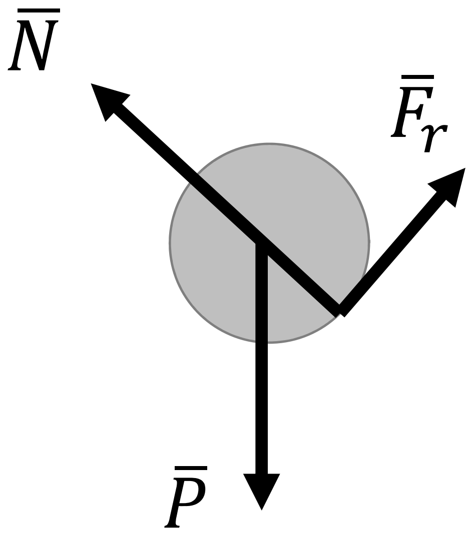
Una esfera maciza que rueda sin deslizar por un plano horizontal se encuentra con un plano inclinado que forma un ángulo α y asciende por el mismo continuando su movimiento de rodadura. Cuando llega a la base del plano inclinado, la rapidez del punto A vale v_A. (Para esfera maciza: $I_{CM}=2MR^2/5$)

a) Hallar la aceleración del centro de masa durante la subida.
b) Hallar la altura máxima que alcanzará el centro de masa.



Ejemplo: TRABAJO DE FUERZAS

DCL



$$W^N = \int \bar{N} \cdot d\bar{r}_{CIR} = 0$$

Es equivalente indicar a la normal en el CM. En ese caso el trabajo también es cero porque la fuerza es perpendicular al desplazamiento del CM

$$W^{Fr} = \int \overline{Fr} \cdot d\bar{r}_{CIR} = 0$$

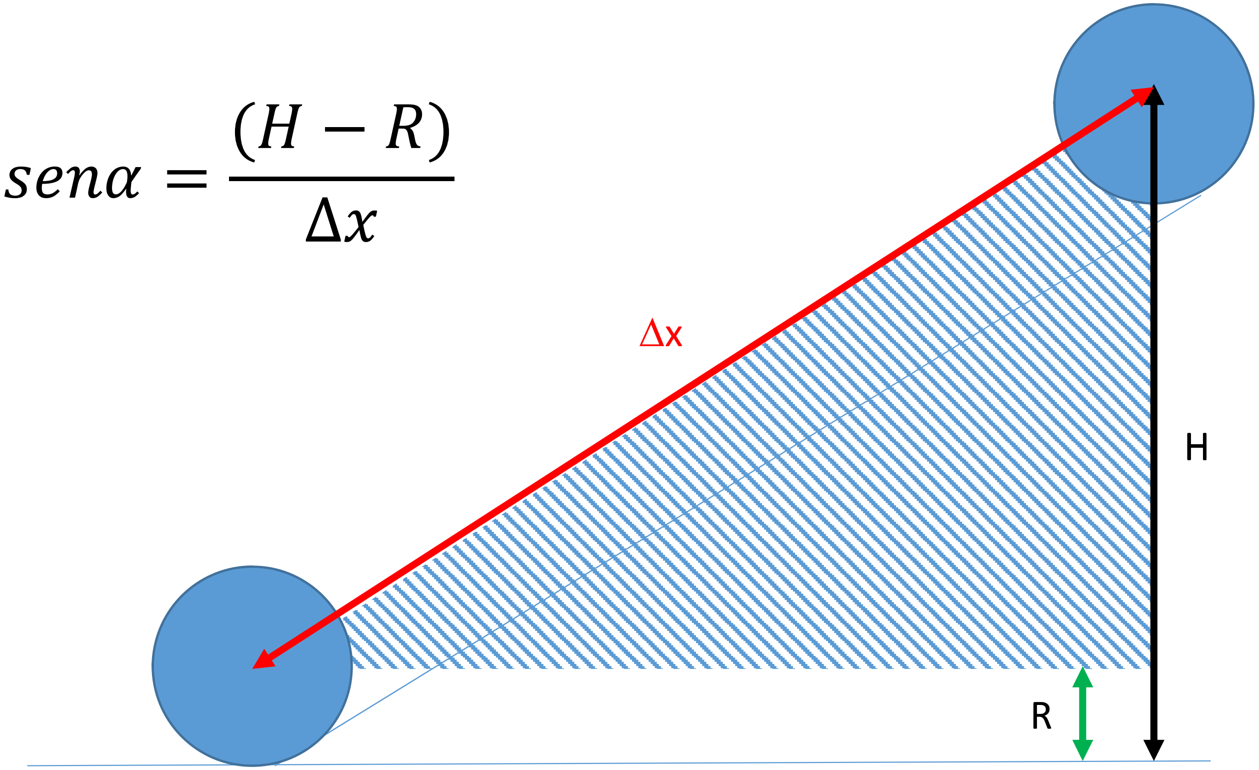
$$W^P = \int \bar{P} \cdot d\bar{r}_{CM} = |\bar{P}| \cdot |\Delta\bar{r}_{CM}| \cdot \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

(1)

$$W^P = |\bar{P}| \cdot \frac{(h - R)}{sen\alpha} \cdot (-sen\alpha)$$

(1)

$$sen\alpha = \frac{(H - R)}{\Delta x}$$



PRINCIPIOS

$$\Delta E_c = W^{TodasFuerzas}$$

$$\Delta E_p = -W^{Peso}$$

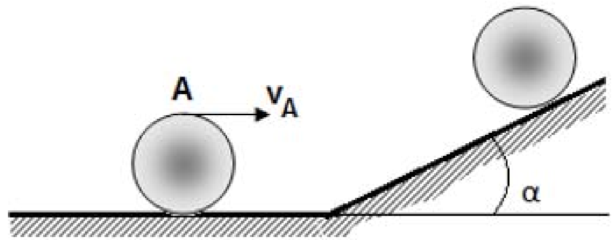
$$\Delta E_M = W^{FuerzasNoCons}$$

Ejemplo: ítem b

Una esfera maciza que rueda sin deslizar por un plano horizontal se encuentra con un plano inclinado que forma un ángulo α y asciende por el mismo continuando su movimiento de rodadura. Cuando llega a la base del plano inclinado, la rapidez del punto A vale v_A. (Para esfera maciza: $I_{CM}=2MR^2/5$)

a) Hallar la aceleración del centro de masa durante la subida.

b) Hallar la altura máxima que alcanzará el centro de masa.



$$\Delta E_M = W^{FuerzasNoCons}$$

$$E_{Mf} - E_{Mi} = W^N + W^{Fr}$$

$$Mgh_M - \left(\frac{7}{40}MV_A^2 + MgR\right) = 0 \quad \rightarrow \quad h_M = \frac{7}{40}\frac{V_A^2}{g} + R$$